$\Leftrightarrow \underline{0 < 1 - 2e^{-x} < 1 - 2e^{-1}}$

D'où $\forall x \in]\text{Log } 2, 1[$ on a $h''(x)>0$

2)a- désignons par T la tangente en $M(t, h(t))$.

$\Rightarrow$ T: $y = h'(t)(x - t) + h(t)$.

Or l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.

Donc le point d'intersection,d'abscisse t', de T et l'axe des abscisses verifi $h'(t)(t' - t) + h(t) = 0 \Leftrightarrow h'(t)(t' - t) = -h(t)$

$$\Leftrightarrow t' = t - \frac{h(t)}{h'(t)}.$$

b- On a h est deux fois dérivables sur tout IR et aussi h' est continue sur IR ce qui donne h vérifie les conditions de **B-** sur tout intervalle $[t, \alpha]$ avec $t \in]\ln 2, 1[$

$\Rightarrow \exists k \in]t, \alpha[$ tel que $h(\alpha)=h(t)+(\alpha-t)h'(t)+\frac{(\alpha - t)^2}{2}h''(k)$

Or $h(\alpha)=0$ d'ou $0=h(t)+(\alpha-t)h'(t)+\frac{(\alpha - t)^2}{2}h''(k)$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{h(t)}{h'(t)} + \alpha - t + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(\alpha)}h''(k)$$

$$\Leftrightarrow t - \frac{h(t)}{h'(t)} = \alpha + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k)$$

$$\Leftrightarrow t' = \alpha + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k)$$

c- • Comme $\forall x \in]\text{Log}2, 1[$ on a, $h'(x) < 0$ et $h''(x) > 0$ alors

$\frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k) < 0$ car $k \in]t, \alpha[\subset]\text{Log}2, 1[$ et $t \in]\text{Log}2, 1[$

$\Leftrightarrow \alpha + \frac{(\alpha - t)^2}{2h'(t)}h''(k) < \alpha \Leftrightarrow \underline{t' < \alpha}$.

• $t \in]\text{Log}2, \alpha[\Rightarrow h(t) > h(\alpha) = 0$ car h est $\searrow$ sur $]\text{Log}2, \alpha[$

De plus $h'(t) < 0$ car $t \in]\text{Log}2, \alpha[\subset]\text{Log}2, 1[$

D'ou $\frac{h(t)}{h'(t)} < 0 \Leftrightarrow -\frac{h(t)}{h'(t)} > 0 \Leftrightarrow t - \frac{h(t)}{h'(t)} > t$

$\Leftrightarrow t' > t$ qui est superieur à Log2

D'ou $\underline{t' > \text{Log}2}$.

Bilan : $t' \in]\text{Log}2, \alpha[$.

3)a- $\star$ $x_o \in]\text{Log}2, \alpha[$ (par hypothèse)

$\Rightarrow$ la proposition de récurrence est vraie pour $n = 0$.

★ Soit $p \in \text{IN}$. Supposons que $x_p \in]\text{Log}2, \alpha[$; montrons que $x_{p+1} \in]\text{Log}2, \alpha[$ .En effet

$x_{p+1} = x_p - \frac{h(x_p)}{h'(x_p)} \in]\text{Log}2, \alpha[$ d'aprés **C-2/c-.**

Conclusion : $\star$ et ★ $\Rightarrow \forall n \in \text{IN}$ on a $x_n \in]\text{Log}2, \alpha[$.